第28卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0293-07

基于小波变换模的FAB扩散模型

周　峰，刘　峰

(西安交通大学理学院信息与计算科学系，西安　710049)

摘　要: 将小波多尺度边缘检测的思想引入到前向一后向(FAB)扩散模型中，根据小波变换能够准确提取图像局部结构信息的特性，给出了利用多个尺度上小波变换模构造图像扩散系数的方法，进而建立了基于小波变换模的前向一后向扩散模型．最后给出了一系列数值实验结果，以比较本文方法与传统FAB方法的图像平滑增强效果．

关键词: 图像平滑；FAB扩散；小波变换；边缘检测

分类号: **AMS**(2000) 94A08; 98U10　　**中图分类号:** TP391.41　　**文献标识码:** A

1　引言

近年来，基于偏微分方程(PDE)的图像处理[1,2]受到了广泛的关注．早期的工作主要包括由Witkin引入的线性尺度空间理论[1]，该理论将扩散过程的扩散时间与高斯平滑滤波器的方差联系起来，建立了线性扩散方程与线性滤波系统的等价性．1990年，Perona和Malik引入了非线性扩散方法，常称为P-M扩散模型[3]．该模型的扩散系数是关于梯度模的非负下降函数，它使扩散沿着梯度的正方向进行，并且使扩散速度随着梯度模的增大而减小．由于平缓区域的梯度模小，扩散速度大；而边缘的梯度模大，扩散速度小，因而P-M模型可在去除噪声的同时能很好地保持边缘．但P-M模型易受噪声干扰，而且是不适定的．1992年，Catté基于高斯预滤波方法改进了P-M模型[4]．Catté模型是适定的，而且由于采用了高斯梯度，扩散系数的估计较为准确，从而提高了恢复图像的质量．然而P-M模型和Catté模型均采用了同样性质的扩散函数，使得扩散过程在边缘附近会减小或停止扩散，导致边缘附近的噪声在很大程度上被保留．为了克服这一缺陷，Weickert引入了扩散张量的概念，建立了基于扩散张量的平滑增强模型[5]．Weickert模型利用了梯度方向与梯度模的信息，并从扩散方向与扩散量两方面控制扩散过程，从而使得扩散滤波可沿边缘进行．但Weickert方法存在过度扩散现象，常使恢复图像产生奇异波动，故常用于诸如指纹一类的流线状图像平滑，而不用于自然图像的滤波处理．

上述扩散模型均采用前向(正向)扩散对图像进行处理，虽然对边缘有保护作用，但无增强作用．为了在去噪的同时增强边缘，2002年，Gilboa提出了前向一后向扩散(FAB)模型[6]．该模型具有平滑增强作用，它将扩散分为正、反两个方向的扩散：正向扩散起平滑作用，反向扩散起锐化边缘的作用．一幅图像经前向-后向扩散后，灰度值常超出初始图像灰度值范围，因而不满足“极值原理”．但Gilboa在文献[6]中指出，在局部范围内使用后向(逆)扩散不会破坏扩散模型整体的稳定性．我们知道，经典的图像平滑与增强是独立进行的两种处理过程，而FAB扩散方法则将二者结合在一起进行，因此有关FAB扩散滤波的研究在近年来受到了人们的广泛关注[7,8]．

本文的研究目的是基于小波变换建立稳健的FAB扩散模型．一般来说，扩散系数的确定分为两步：一是检测边缘信息，二是确定扩散函数．其中边缘信息对扩散量(即扩散系数的大

收稿日期: 2009-09-30.　**作者简介:** 周峰(1983年1月生)，女，硕士．研究方向：数字图像处理．

小)的确定有非常重要的影响．在Gilboa所给的FAB扩散模型中，边缘信息是用图像梯度检测的，这使得扩散过程对噪声比较敏感．为此，本文采用基于小波变换方法[9]提取图像局部结构信息，以降低噪声对扩散系数的影响，提高图像的扩散滤波效果．

2 预备知识

2.1 FAB模型

Gilboa提出的FAB扩散模型[6]如下

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div}\big[C(|\nabla f|)\nabla f\big], \quad t\in(0,+\infty), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ f(x,y,0)=f_0(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中$f_0(x,y)$为观察图像，$C(s)$称为扩散函数，常取其形式如下

$$C(s)=\frac{1}{1+(s/k_f)^n}-\frac{\alpha}{1+((s-k_b)/\omega)^{2m}}, \tag{2}$$

其中k_f, k_b, ω, α, n, m为参数．参数k_f的作用与P-M模型中参数作用类似，用来定义前向扩散范围，具体见文献[3]，参数k_b, ω用来定义后向扩散范围，k_b为后向扩散的中心梯度模，ω为以k_b为中心的后向扩散宽度，k_b的取值取决于所要锐化增强的梯度模的大小，并且通过ω来控制后向扩散的范围，使前后向扩散范围不会发生重叠，参数α用来确定前后向扩散比例．一般取$n=4$, $m=1$，而其它参数应满足如下两个不等式[6]

$$\alpha\le\frac{k_f}{2(k_b+\omega)}, \quad 0<\omega<k_b-k_f, \tag{3}$$

$$\max_{s<k_f}\big\{s\cdot C(s)\big\} > \max_{k_b-\omega<s<k_b+\omega}\big\{s\cdot C(s)\big\}, \tag{4}$$

式中$s\cdot C(s)$称为通量．条件(4)保证在后向扩散过程中不会产生新的奇异点，从而不破坏扩散模型的整体稳定性．

FAB扩散模型的缺点是参数很难确定．Gilboa通过计算平均梯度绝对值(mean absolute gradient, MAG)，即$|\nabla u|$的平均值来确定参数，例如：$[k_f,k_b,\omega]=[2,4,1]\times\text{MAG}$.

图1给出了系数函数$C(s)$以及它的通量$s\cdot C(s)$的图形．当$C(s)$取正值时发生前向扩散，用来实现平滑；当$C(s)$取负值时，发生后向扩散，用来实现边缘的锐化和增强．

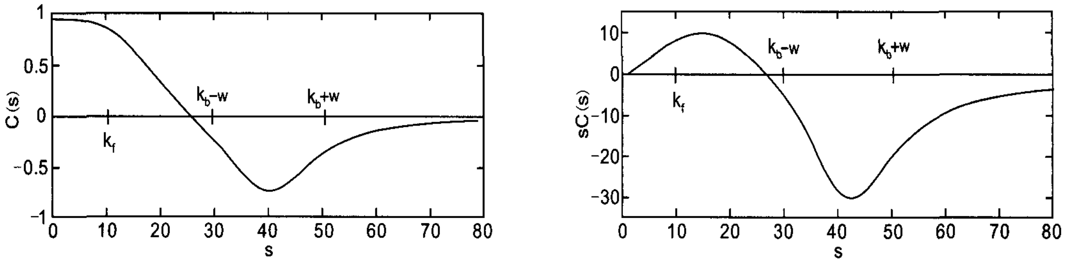


图1: 关于梯度模s的扩散系数函数$C(s)$及通量$s\cdot C(s)$曲线

2.2 小波变换

设 $\psi(x,y)$ 是二维基本小波，则任意 $f(x,y)\in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 的连续小波变换 (CWT) 定义为 [9]

$$W_s f(x,y)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\bar{\psi}_{s,x,y}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\big\langle f(u,v),\psi_{s,x,y}(u,v)\big\rangle, \tag{5}$$

其中

$$\psi_{s,x,y}(u,v)=\frac{1}{s}\psi\Big(\frac{u-x}{s},\frac{v-y}{s}\Big),\quad s>0,$$

s 表示尺度．如果 $\psi(s,y)$ 是可分离的，那么 CWT 有三个分量，即水平细节、垂直细节与对角细节．本文主要用小波变换提取图像的边缘信息，因此只用到水平与垂直两个方向的分量．以下讨论中，我们记这两个方向的小波变换为

$$W_s^k f(x,y)=\big\langle f(u,v),\psi_{s,x,y}^k(u,v)\big\rangle,\quad k=1,2,$$

其中 $\psi^1(x,y)$ 与 $\psi^2(x,y)$ 分别是水平与垂直两个方向上的小波．小波变换的模定义为

$$M_s f(x,y)=\sqrt{|W_s^1 f(x,y)|^2+|W_s^2 f(x,y)|^2}. \tag{6}$$

若取尺度 s 为 $\{2^j\}_{j\in\mathbb{N}}$，则称相应的 $\{W_{2^j}^1 f(x,y),W_{2^j}^2 f(x,y)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为 $f(x,y)$ 的二进小波变换．二进小波变换的优点是可通过卷积进行快速计算．

通常用 CWT 检测图像边缘，但其计算比二进小波变换复杂，因此本文在以下扩散模型的构造中采用二进小波变换．

图 2 给出了应用小波变换与高斯梯度的含噪 Lena 图像的边缘检测效果．图 2(a) 为原始图像，图 2(b) 为加噪图像，图 2(c) 和图 2(d) 分别为 $j=2,3$ 的二进小波变换模图像，图 2(e) 和图 2(f) 分别为经过方差为 1 与 2 的高斯函数平滑后的梯度图像．由图可见，在如肩膀与镜面的平滑区域内，梯度图像比小波模图像含有更多的噪声．理论上，梯度图像的噪声随高斯函数的方差增大逐渐减小，但同时细小边缘也逐渐消失．

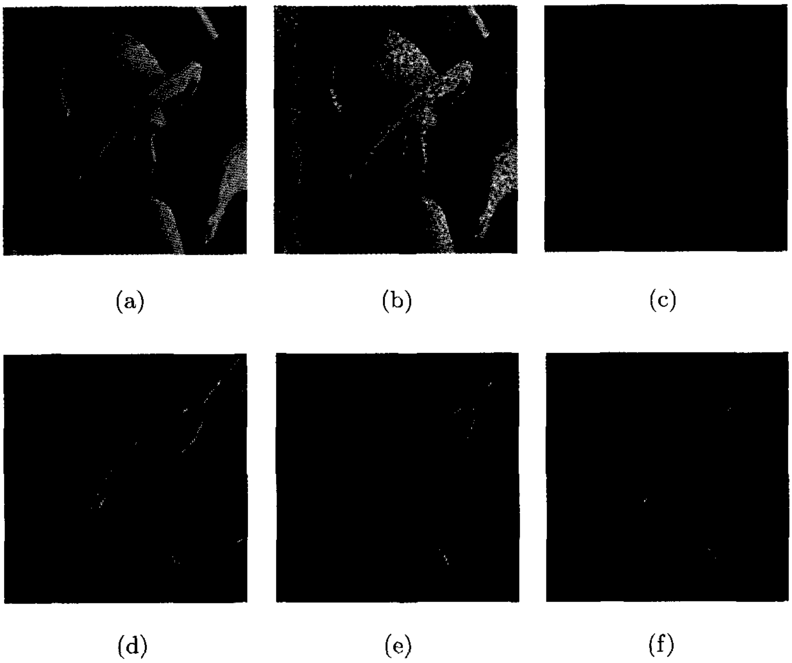


图 2: 小波变换模与梯度模图像

3 基于小波变换模的FAB扩散方程

3.1 基于小波变换模的FAB扩散方程

根据2.2节的讨论，利用小波变换可充分提取图像的局部结构信息．因此我们定义如下的基于小波变换的FAB扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div}\big[C(M_{2^j} f(x,y))\nabla f\big], \quad t\in(0,+\infty), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ f(x,y,0)=f_0(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

其中$C(s)$由(2)式定义，$M_{2^j}f(x,y)$由(6)式定义，该模型中各参数的作用和限定条件同FAB模型．与Gilboa的FAB扩散模型相比，扩散模型(7)利用小波变换模代替梯度模确定扩散系数，因此它是Gilboa扩散模型的推广．以下我们称(7)为小波FAB扩散模型，简称为WFAB扩散模型．

WFAB扩散模型的性质与小波尺度参数j有关．当尺度j较小时，小波变换模含有更多的小边缘信息，同时也含有较多的噪声，扩散滤波对图像边缘有较强的保持和增强作用，但平滑能力降低．当尺度增大时，小波变换模主要包含大边缘信息，这时扩散滤波主要增强大的边缘，对噪声和细小边缘有较强的平滑作用．因此在实际应用时应适当的选择尺度参数．

3.2 基于WFAB模型的扩散算法步骤

步骤1 选择合适的小波和尺度参数2^j，对$f(x,y)=f_0(x,y)$分别做沿x和y方向的二进小波变换，得$W^1_{2^j}f(x,y)$, $W^2_{2^j}f(x,y)$;

步骤2 按(6)式计算小波变换模$M_{2^j}f(x,y)$;

步骤3 选择满足(3)式的参数k_f, k_b, ω, α, n和m;

步骤4 将$M_{2^j}f(x,y)$和参数k_f, k_b, ω, α, n, m，代入(2)式，计算$C(M_{2^j}f(x,y))$;

步骤5 比较前-后向扩散的最大通量，如果

$$\max_{s<k_f}\big\{s\cdot C(s)\big\} > \max_{k_b-\omega<s<k_b+\omega}\big\{s\cdot C(s)\big\},$$

转步骤6；否则转步骤3;

步骤6 将$C(M_{2^j}f(x,y))$代入(7)式，求解该定解问题．

在用迭代格式求解(7)时，$C(s)$要根据前一次滤波结果重新计算．

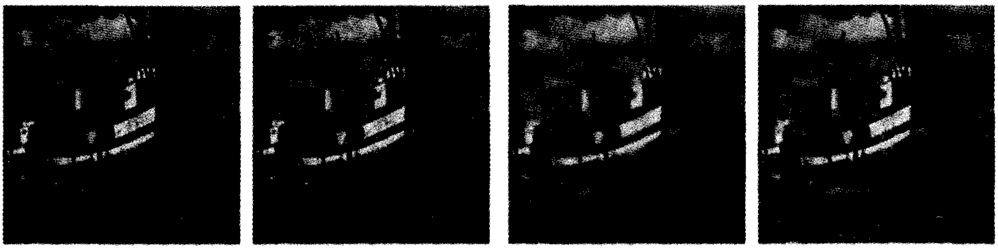
4 数值实验

为了检验WFAB方法的平滑增强效果，我们给出了一系列数值实验结果．原始图像是大小为256×256的Boat图像和314×314的Tiffany图像，如图3(a)和图4(a)所示．为便于比较，各种模型的求解均用前后向差分混合离散格式．实验中的小波函数采用二次B样条小波．

表1和表2给出了用FAB方法和WFAB方法分别对Boat和Tiffany图像进行滤波所得到的滤波图像的峰值信噪比．表中第1行为输入图像噪声水平，其中σ为高斯白噪声的标准方差，input-PSNR为含噪图像的峰值信噪比PSNR(dB)，其余各行为输出图像PSNR(dB)．在不同噪声水平下，WFAB方法的去噪效果均优于传统的FAB方法．

图3和图4分别给出了用WFAB方法和FAB方法作图像扩散滤波的滤波图像．在图3中，FAB模型的参数为：$k_f=30$, $k_b=180$, $\omega=2$, $\alpha=0.08$；而WFAB模型的参数为：$k_f=30$, $k_b=40$, $\omega=5$, $\alpha=0.3$，其中加噪图像的噪声水平为$\sigma=10$．图4中，FAB模型的参数为：$k_f=30$, $k_b=120$, $\omega=2$, $\alpha=0.12$，WFAB模型的参数为：$k_f=40$, $k_b=45$, $\omega=$

2, $\alpha = 0.4$，其中加噪图像的噪声水平为 $\sigma = 20$. 以上实验的时间步长均取为0.1，迭代次数为15次.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 3: 前向-后向扩散滤波例子，(a) 原始图像；(b) 含高斯白噪声图像，噪声标准方差 $\sigma = 10$; (c) FAB方法；(d) WFAB 方法，其中 j=3

(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 4: 前向-后向扩散滤波例子，(a) 原始图像；(b) 含高斯白噪声图像，噪声标准方差 $\sigma = 20$; (c) FAB 方法；(d) WFAB 方法，其中 j=3

表 1: Boat 图像的 FAB 方法和本文 WFAB 方法比较

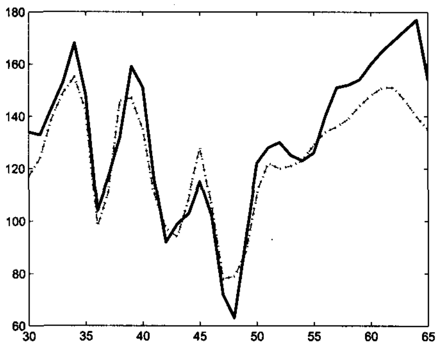
	σ/input-PSNR				
	10/32.04	20/29.33	30/28.48	40/28.09	50/27.88
FAB 方法	33.10	33.01	31.74	29.78	28.68
WFAB 方法	34.67	33.29	31.77	30.58	29.66

表 2: Tiffany 图像的 FAB 方法和本文 WFAB 方法比较

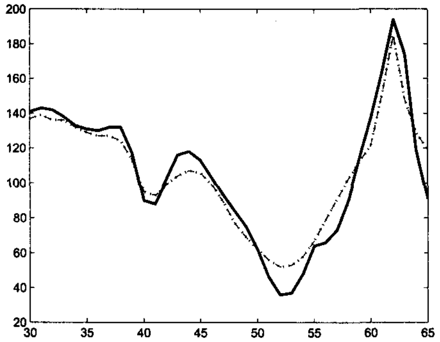
	σ/input-PSNR				
	10/32.09	20/29.39	30/28.53	40/28.19	50/27.95
FAB 方法	33.99	33.89	32.33	29.94	28.78
WFAB 方法	35.69	34.34	32.75	31.52	30.59

比较而言，用WFAB方法处理后得到的恢复图像具有更清楚的边缘，如Boat图像中的船舷、桅杆以及天空的白云部分，边缘保持和增强效果明显．这说明，WFAB方法在处理边缘方面具有优势，但在平滑区域，如Tiffany手背部分，不如FAB方法柔和．

为了进一步说明WFAB方法的增强效果，我们提取了Boat和Tiffany恢复图像上的一段局部横截灰度值曲线，如图5所示．对应WFAB方法的灰度曲线在边缘处明显高于用FAB方法的得到的曲线，这说明WFAB方法对边缘的增强作用强于FAB方法．



(a)



(b)

图5: 恢复图像的横截灰度曲线，(a) Boat图像的横截灰度值曲线；(b) Tiffany图像的横截灰度值曲线，虚线对应于FAB方法，实线对应WFAB方法

5 结论

本文通过将小波变换边缘检测的思想引入到FAB扩散模型中，分析研究了基于小波变换的FAB扩散模型．由于小波的多分辨性，增强了FAB扩散模型的抗噪能力和边缘增强能力，同时小波的引入也为扩散系数的构造提供了新的方法．但用小波变换检测图像边缘时易产生边缘偏移，从而引起滤波图像在边缘处的振动，如何准确定位边缘使扩散系数更准确反映图像的局部结构信息是需要进一步探讨的问题．

参考文献：

[1] Witkin A P. Scale space filtering[C]// Proceedings International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1983: 1019-1023

[2] Chambolle A. Partial differential equations and image processing[C]// Proceedings First IEEE-International Conference on Image Processing, Austin, Texas, November, 1994, 10(1): 16-20

[3] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639

[4] Catté F, Lions P L, Morel J M, *et al.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics: Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193

[5] Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing[D]. Germany: University of Stuttgart, 1996

[6] Gilboa G, Sochen N, Zeevi Y Y. Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(7): 687-703

[7] Sochen N, Gilboa G, Zeevi Y Y. Color image enhancement by a forward-and-backward adaptive Beltrami flow[C]// Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle, Heidelberg, Berlin: Springer, 2000: 319-328
[8] Wang Y, Zhang L P, Li P X. Local variance-controlled forward-and-backward diffusion for image enhancement and noise reduction[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(7): 617-643
[9] Mallat S. A wavelet tour of signal processing (Second Edition)[M]. Beijing: China Machine Press, 2002

Forward-and-backward Diffusion Processes Based on Wavelet Transform Modulus

ZHOU Feng, LIU Feng

(Department of Information Sciences, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: This paper introduces the idea of the multiscale edge detection via wavelet modulus into the forward-and-backward (FAB) diffusion models. By utilizing the characteristics that the wavelet transform can well extract the local structure information of an image, we present a new method to construct an diffusivity using wavelet modulus at several scales, and establish the wavelet-based FAB diffusion model. Finally, we present several numerical experiments for image smoothing and enhancing to compare the proposed model with the previous FAB models.
Keywords: image smoothing; FAB diffusion; wavelet transform; edge detection

Received: 30 Sep 2009. **Accepted:** 13 May 2010.